ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES
Fondée en 1949 — Reconnue par l'État
Diplôme visé par le Ministère de l'Éducation Nationale
1, Rue Bougainville — 75007 PARIS
Tél. : 45 51 32 59

MATHEMATIQUES 1ère EPREUVE

Voie Economique

Durée 4 H - Coefficient 4

EXERCICE I :

On veut étudier l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$ vérifiant l'égalité : (1) $A^2 = A$

On appelle f l'endomorphisme associé à la matrice A : $y = f(x)$ avec $f : E_2 \to E_2$ où E_2 est un espace vectoriel de dimension 2 muni de la base (e_1, e_2); avec $x=x_1e_1+x_2e_2$ et $y=y_1e_1+y_2e_2$:

$$Y = AX \quad \text{avec} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1°) A et B étant deux matrices vérifiant (1), démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A+B vérifie l'égalité (1) est que :

$AB+BA=0$ (0 matrice nulle).

2°) Soit p l'endomorphisme associé à A.

a) Montrer que l'ensemble Inv $p=\{x \in E_2 / p(x)=x\}$ est un sous-espace vectoriel de E_2.
Peut-on considérer que Inv p est un sous espace-propre ?
A quelle valeur propre est-il associé ?

b) Montrer que l'ensemble Ker $p=\{x \in E_2 / p(x)=0\}$ est un sous-espace vectoriel de E_2.
Peut-on considérer que Ker p est un sous espace-propre ?
A quelle valeur propre est-il associé ?

c) Soit λ une valeur propre de p, associée au vecteur propre v $(v \neq 0)$, démontrer que $(\lambda^2-\lambda)v=0$ et en déduire que $\lambda=0$ ou $\lambda=1$.

Soit E_0 et E_1 les sous-espaces propres associés à $\lambda=0$ et $\lambda=1$, que peut-on dire sur ces sous-espaces ?

Démontrer que leur intersection est réduite au vecteur nul et que tout vecteur x de E_2 s'écrit d'une façon unique $x=y+z$, où $y \in E_0$ et $z \in E_1$.

A SUIVRE

En déduire que pour tout vecteur x de E_2, il existe un unique vecteur x' de Ker p et un unique vecteur x" de Inv p tels que x=x'+x". On note alors E_2 = Ker p $\oplus$ Inv p.

d) Soit Im p=$\{ y \in E_2 / \exists x \in E_2 \quad y=p(x) \}$.
Vérifier que Im p est un sous-espace vectoriel de E_2, et que Im p=Inv p.

3°) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ vérifiant l'égalité (1).

Montrer par le calcul matriciel que A est nécessairement une matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & \frac{a-a^2}{b} \\ b & 1-a \end{pmatrix} \quad (b \neq 0)$$

4°) On pose TrA = a+d.

Déterminer dans le cas général Im p et Ker p, p étant l'endomorphisme associé à A.
Indiquer une base de ces deux sous-espaces.
Montrer les équivalences suivantes :
TrA = 0 <=> Ker p = E_2.
TrA = 1 <=> Ker p est une droite vectorielle.
TrA = 2 <=> Ker p = {0}.

5°) Soit A et B deux matrices vérifiant l'égalité (1), telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{a-a^2}{b} \\ b & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a' & \frac{a'-a'^2}{b'} \\ b' & 1-a' \end{pmatrix}$$

b,b' étant deux réels non nuls.

Calculer AB+BA.

Démontrer que AB+BA = 0 <=> $\begin{cases} a+a'=1 \\ b+b'=0 \end{cases}$

En déduire que AB = BA = 0, et le théorème suivant :

Si f et g sont deux endomorphismes de E_2 tels que $f^2=f$ et $g^2=g$, alors si $(f+g)^2 = f+g$ on a $f+g = Id_{E_2}$.

EXERCICE II :

1°) Etudier les fonctions $f_n(x) = \tan^n x$ où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Tracer les graphes de ces fonctions dans un même repère orthonormé en plaçant clairement ces graphes les uns par rapport aux autres.

T.S.V.P.

2°) Soit $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$

Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

On rappelle que la dérivée de tan x est $1+\tan^2 x$.

3°) Etudier la suite $(I_n)_{n\geq 0}$. Prouver l'existence de $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4°) On veut démontrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. Pour cela, on fixera un nombre α compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

On écrit alors $I_n = \int_0^{\alpha} \tan^n x \, dx + \int_{\alpha}^{\pi/4} \tan^n x \, dx$.

Démontrer que :

$$0 \leq \int_0^{\alpha} \tan^n x \, dx \leq \tan^n \alpha \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_{\alpha}^{\pi/4} \tan^n x \, dx \leq \frac{\pi}{4} - \alpha$$

Déduire alors la valeur de $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

5°) Démontrer les inégalités :

$\forall n > 0 \quad I_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$ et $I_{n+2} \leq \frac{1}{2(n+1)}$.

On utilisera pour cela la relation de récurrence de la question 2°).

En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ (équivalent).

EXERCICE III :

On considère une urne contenant (n-2) boules blanches et 2 boules noires. On tire les boules une à une sans remise. On désigne par X la variable aléatoire réelle égale au rang d'apparition de la première boule noire et par Y le rang d'apparition de la seconde boule noire.

1°) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par les variables X et Y.

2°) Décrire l'univers permettant de définir les variables X et Y.
(On utilisera un modèle lié aux combinaisons).

A SUIVRE

3°) Soit $i \in \{1,2,...n-1\}$, démontrer que $P(X=i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$

et que si $j \in \{2,3,...n\}$, $P(Y=j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}$.

4°) Calculer l'espérance et la variance de X puis celles de Y.

5°) On reprend le même problème en introduisant le couple aléatoire $Z = (X,Y)$.

On prendra pour univers $\Omega = Sn$ = ensemble des bijections de l'ensemble des boules supposées numérotées de 1 à n sur l'ensemble $\{1,2,...n\}$ des rangs des tirages et sur lequel on définit une probabilité uniforme.

Démontrer que : $P[Z = (i,j)] = \frac{2(n-2)!}{n!}$

où $(i,j) \in T$ et $T = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / 1 \leq i < j \leq n\}$.

Retrouver par cette méthode P(X=i) et P(Y=j).

6°) Calculer le coefficient de corrélation des deux variables X et Y.

EXERCICE IV :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = |x|^{x+1/x}$ pour $x \neq 0$.

1°)Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f. Montrer que la fonction f peut-être prolongée à droite du point 0, on appellera g la fonction obtenue par ce prolongement.

2°)Etudier les branches infinies de g (asymptotes,...).

3°)En quels points la fonction g est-elle dérivable ? Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$ et $g'_d(0)$.

4°)Déterminer le signe de g'(x). On étudiera l'application

$$x \to \ln|x| + \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot$$

Etudier les variations de g.

5°)Donner l'allure du graphe de g.

FIN